Espaçabilidade, Residualidade e Algebrabilidade em Espaços de Funções e Sequências

Zaqueu Cristiano Moreira[1]   Daniela Mariz Silva Vieira[2]

[1]Bolsista PICME-OBMEP (CNPq)

[2]Orientadora

Apresentação de MAT0148 (17 de dezembro de 2021)

Objetivo

Nosso objetivo é estudar quão "grandes" são determinados subconjuntos de certos espaços de funções e sequências.

Conjuntos que estudaremos

- O conjunto $\mathcal{CND}$ das funções contínuas reais definidas no intervalo $[0, 1]$ mas diferenciáveis em nenhum ponto (*continuous nowhere differentiable functions*);
- o conjunto $\mathcal{FA}$ das funções fortemente anulares (*strongly annular functions*) que são as funções holomorfas f definidas no disco unitário aberto complexo $\mathbb{D}$ tais que

$$\limsup_{r \to 1} \left(\min_{|z|=r} |f(z)| \right) = +\infty;$$

- os conjuntos de sequências reais $l_p \setminus l_q$ (para $p > q \geq 1$) e $l_p \setminus \bigcup_{1 \leq q < p} l_q$ (para $p > 1$).

Ferramentas para analisar "tamanho"

Utilizaremos os seguintes conceitos para falarmos em conjuntos "grandes" do ponto de vista algébrico:

1. Dados X um espaço vetorial topológico e $A \subseteq X$, dizemos que A é
   - **lineável** se $A \cup \{0\}$ contém um subespaço vetorial de dimensão infinita;
   - **denso-lineável** se $A \cup \{0\}$ contém um subespaço vetorial de X de dimensão infinita e que é denso em X;
   - **maximal denso-lineável** se $A \cup \{0\}$ contém um subespaço vetorial M de X tal que M tem dimensão infinita, M é denso em X e $\dim(M) = \dim(X)$;
   - **espaçável** se $A \cup \{0\}$ contém um subespaço vetorial fechado de dimensão infinita.
2. Dados $\mathcal{B}$ uma álgebra comutativa e $A \subseteq \mathcal{B}$ dizemos que A é
   - **algebrável** se $A \cup \{0\}$ contém uma álgebra infinitamente gerada;
   - **fortemente α-algebrável** se $A \cup \{0\}$ contém uma álgebra livre α-gerada. (Quando $\alpha = \aleph_0 = \mathrm{card}(\mathbb{N})$ dizemos apenas **fortemente algebrável**.)

Utilizaremos os seguintes conceitos para falarmos em conjuntos "grandes" do ponto de vista topológico:

1. Dados X um espaço topológico e $A \subseteq X$, dizemos que A é
    - **nunca denso** (ou **raro**) em X se $\left(\overline{A}\right)^0 = \emptyset$;
    - **de primeira categoria** (ou **magro**) em X se A é união enumerável de conjuntos nunca densos em X;
    - **residual** (ou **comagro**) em X se $X \setminus A$ é de primeira categoria em X.

Por uma consequência do Teorema de Baire (Se X é um espaço métrico completo então toda intersecção enumerável de subconjuntos abertos densos em X é um subconjunto denso em X) temos que em um espaço topológico metrizável e completo (como serão os que trabalharemos), um subconjunto e seu complementar não podem ser ambos de primeira categoria. Portanto, em tais espaços, sempre que obtivermos a residualidade de um subconjunto podemos concluir que ele é não vazio ($\emptyset$ é de primeira categoria em qualquer espaço topológico) e é "grande" do ponto de vista topológico.

O conjunto $\mathcal{CND}$ (residualidade)

Não é trivial que este conjunto é não vazio. Até a exibição do Monstro de Weierstrass em 1872, pensava-se que uma função continua deveria ter derivada em pelo menos um ponto de seu domínio. Também podemos ver que este conjunto é não-vazio através do seguinte

Teorema

$\mathcal{CND}$ é residual no espaço de Banach $C[0,1]$ (com a norma do máximo).

Demonstração. A prova se baseia na definição, para cada $n \in \mathbb{N}$, de um conjunto E_n das funções $f \in C[0,1]$ satisfazendo a seguinte propriedade:

$$\text{“Existe } x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \text{ tal que } \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} \leq n, \forall h \in (0, 1-x)\text{”}.$$

Vê-se que, para cada $n \in \mathbb{N}$, E_n é fechado e nunca denso em $C[0,1]$, de onde $E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ é um conjunto de primeira categoria em $C[0,1]$ e portanto $A := C[0,1] \setminus E$ é residual em $C[0,1]$. Prova-se então que $A \subseteq \mathcal{CND}$ e segue que $\mathcal{CND}$ é residual no espaço de Banach $C[0,1]$. $\square$

O resultado anterior nos disse que $\mathcal{CND}$ é "grande" do ponto de vista topológico. Ele também é do ponto de vista algébrico por conta do seguinte.

Teorema

$\mathcal{CND}$ é espaçável (contém, a menos da função nula, um subespaço vetorial fechado de dimensão infinita do espaço de Banach $C[0,1]$).

Existem pelo menos duas demonstrações deste fato: a de Berezhnoi e a de Fonf-Gurariy-Kadets.

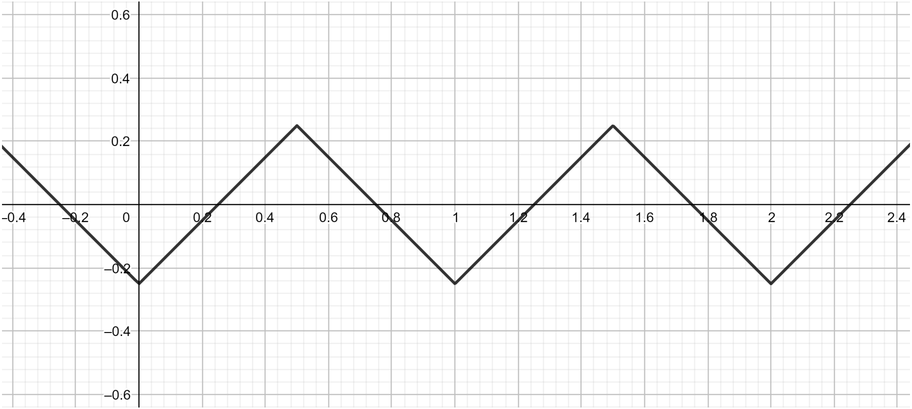
A seguir, um esboço da prova de Berezhnoi.
Demonstração. A ideia é começar definindo, indutivamente, duas matrizes infinitas $D = (d_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$ e $N = (n_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$. Entre as várias escolhas possíveis dadas pelas referências, é possível fazer a seguinte escolha particular para facilitar as contas:

$$D := \begin{pmatrix} 2 & 2^{10} & 2^{30} & 2^{63} & \cdots \\ 0 & 2^{4} & 2^{23} & 2^{55} & \cdots \\ 0 & 0 & 2^{16} & 2^{47} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 2^{39} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, N := \begin{pmatrix} 3 & 2^{12}\cdot 3 & 2^{35}\cdot 3 & 2^{71}\cdot 3 & \cdots \\ 0 & 2^{3}\cdot 3 & 2^{25}\cdot 3 & 2^{60}\cdot 3 & \cdots \\ 0 & 0 & 2^{15}\cdot 3 & 2^{49}\cdot 3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 2^{38}\cdot 3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Definem-se então

$$\varphi_0(x) := d(x, \mathbb{Z}) - \frac{1}{4}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(onde $d(x, \mathbb{Z})$ é a distância de um número real x para o inteiro mais próximo)



e, para cada par $j, k \in \mathbb{N}$ com $j \leq k$,

$$\varphi_{j,k}(t) := \frac{\varphi_0(n_{j,k}t)}{n_{j,k}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Então considera-se, para cada $j \in \mathbb{N}$, uma função contínua $\psi_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi_j(t) := \sum_{m=j}^{\infty} d_{j,m}\varphi_{j,m}(t)$$

e define-se,

$$e_j := \frac{\psi_j|_{[0,1]}}{\|\psi_j|_{[0,1]}\|_\infty} \in C[0,1]$$

de modo que

$$E := \overline{\mathrm{span}\{e_j : j \in \mathbb{N}\}}$$

é um subespaço vetorial fechado de $C[0,1]$.

O conjunto $\mathcal{CND}$ (espaçabilidade por Berezhnoi)

Em seguida, mostra-se que $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma base de Schauder para E (e assim E tem dimensão infinita) o que está fortemente baseado no seguinte resultado:

Proposição

$$\frac{1}{16}\sum_{j=1}^{N}|a_j| \leq \left\|\sum_{j=1}^{N} a_j e_j\right\|_\infty \leq \sum_{j=1}^{N}|a_j|, \text{ para todos } N \in \mathbb{N} \text{ e } a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}.$$

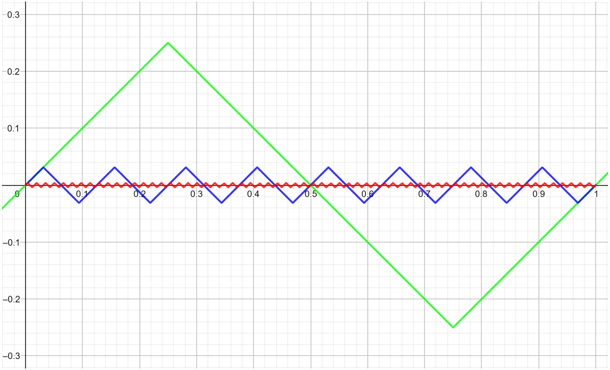
Por fim, conclui-se a espaçabilidade de $\mathcal{CND}$ ao ver que todo elemento não-nulo de E é uma função que em nenhum ponto é diferenciável, usando para isso várias propriedades estudadas das funções definidas anteriormente. $\square$

Demonstração. A ideia aqui é começar definindo uma família de funções $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ em $\mathbb{R}$ fazendo

$$u_1(x) := \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} - x, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ x - 1, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

e estendendo a função u_1 à $\mathbb{R}$ fazendo $u_1(y) = u_1(y - \lfloor y \rfloor)$ onde $\lfloor y \rfloor$ denota o maior inteiro que é menor que y. Então define-se para $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$u_n(x) = \frac{u_1(8^{n-1}x)}{8^{n-1}}.$$



Estudando os extremos e períodos destas funções mostra-se que as funções

$$\begin{aligned} \varphi_p : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{t=1}^{\infty} u_{2^{p-1}t}(x) \end{aligned}$$

(para $p = 1, 2, 3, ...$) são tais que toda função não nula da forma $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i$ (com $a_i \in \mathbb{R}$) é contínua mas diferenciável em nenhum ponto. A seguir, prova-se que

Proposição

$$\frac{5}{16}\sum_{j=1}^{N} |a_j| \leq \left\| \sum_{j=1}^{N} a_j \frac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|_\infty} \right\|_\infty \leq \sum_{j=1}^{N} |a_j|, \forall N \in \mathbb{N} \forall a_1, ..., a_N \in \mathbb{R}.$$

e conseguimos concluir que $(\frac{\varphi_p}{\|\varphi_p\|_\infty})_{p\in\mathbb{N}}$ é uma base de Schauder para $\overline{\mathrm{span}\{\varphi_p : p \in \mathbb{N}\}}$, o qual é um subespaço vetorial fechado de $C[0,1]$ e contido em $\mathcal{CND} \cup \{0\}$. $\square$

O conjunto $\mathcal{FA}$ (residualidade)

Primeiramente, observa-se que não é trivial que existam funções fortemente anulares pois não existe função holomorfa f definida em $\mathbb{D}$ tal que

$$\lim_{|z|\to 1} |f(z)| = +\infty$$

por causa do Princípio do Máximo e do Princípio da Continuação Uniforme. Uma prova não-construtiva de que $\mathcal{FA} \neq \emptyset$ (e é topologicamente "grande") é dada pelo

Teorema

$\mathcal{FA}$ é residual em $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ (o espaço vetorial topológico de todas as funções $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorfas, dotado da topologia compacto-aberta).

A topologia compacto-aberta τ_c é aquela em que as vizinhanças abertas de uma função $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ são reuniões finitas de conjuntos da forma

$$V(f, K, \epsilon) := \{g \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \sup_K |g - f| < \epsilon\}$$

onde $K \subseteq \mathbb{D}$ é compacto e $\epsilon > 0$, de modo que $(\mathcal{H}(\mathbb{D}), \tau_c)$ é um espaço topológico metrizável e completo.

Segue um esboço da prova do teorema:

Demonstração. Mostra-se a residualidade de $\mathcal{FA}$ provando a residualidade de alguns subconjuntos especiais dele, a saber os conjuntos

$$\mathcal{FA}(\varphi, \sigma) := \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D});\ \lim_{\substack{|z|\to 1 \\ z\in C(\sigma)}} \frac{|f(z)|}{\varphi(z)} = +\infty \right\},$$

onde $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow (0, +\infty)$ é uma função contínua, σ é uma sequência em $(0, 1)$ estritamente crescente que converge a 1 (chamamos de Σ o conjunto de tais sequências) e $C(\sigma)$ é a reunião das circunferências cujos raios são os termos de σ.

A ideia é considerar, para cada $m, n \in \mathbb{N}$, os conjuntos

$$A_{m,n} := \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : |f(z)| > n\varphi(z), \text{para todo } z \in r_m\partial\mathbb{D}\}$$

$$A_n := \bigcup_{m\geq n} A_{m,n}$$

de forma que obtem-se

$$\mathcal{FA}(\varphi, \sigma) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Prova-se que cada A_n é aberto e denso em $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, e isto implica que $\mathcal{H}(\mathbb{D}) \setminus \mathcal{FA}(\varphi, \sigma) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{H}(\mathbb{D}) \setminus A_n)$ é união enumerável de fechados de interior vazio, ou seja, é união enumerável de conjuntos nunca densos e portanto é um subconjunto de primeira categoria em $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.
Em particular, para $\varphi \equiv 1$ (a função constante igual a 1), tem-se que $\mathcal{FA} \supseteq \mathcal{FA}(\varphi, \sigma)$ para qualquer σ e portanto $\mathcal{FA}$ é residual em $\mathcal{H}(\mathbb{D})$. $\square$

$\mathcal{FA}$ também é "grande" algebricamente e podemos ver isso através de dois conceitos diferentes. Primeiramente

Teorema

$\mathcal{FA}$ é maximal denso-lineável.

Demonstração.

- Considera-se $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma enumeração dos polinômios em uma variável complexa cujas partes real e imaginária são números racionais;
- tomamos um $f_0 \in \mathcal{FA}(\varphi) := \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \mathcal{FA}(\varphi,\sigma)$ (pois $\mathcal{FA}(\varphi,\sigma) \neq \emptyset$), onde $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow (0,+\infty)$ é a função contínua dada por

$$\varphi(z) = e^{\frac{1}{1-|z|}};$$

- define-se para cada $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$, a função $e_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$e_\alpha(z) = e^{\alpha z};$$

- são fixados, para cada $n \in \mathbb{N}$, um $\beta_n \in [n-1, n)$ e um $\delta_n > 0$ tal que $d(0, \delta_n e_{\beta_n} f_0) < \frac{1}{n}$.

Então, vê-se que o seguinte subespaço vetorial de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$

$$M := \operatorname{span}\{P_n + \delta_n e_\alpha f_0 : n \in \mathbb{N}, \alpha \in [n-1, n)\}$$

é denso em $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, tem mesma dimensão que $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ e está inteiramente contido em $\mathcal{FA} \cup \{0\}$. $\square$

O conjunto $\mathcal{FA}$ (algebrabilidade forte)

Outra forma de ver que $\mathcal{FA}$ é algebricamente "grande" é o seguinte

Teorema

$\mathcal{FA}$ é fortemente algebrável.

Demonstração. Constroem-se, indutivamente, famílias de funções $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ e $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $C(\mathbb{D},(0,+\infty))$ tais que

$$f_n \in \mathcal{FA}(\phi_{n-1},\sigma) \quad \text{e} \quad \phi_j(z) = e^{M(f_j,|z|)}$$

(novamente usando que $\mathcal{FA}(\phi,\sigma)$ é sempre não-vazio) para todos $n, j \in \mathbb{N}$, com ϕ_0 sendo a função constante igual a 1, $M(f_j,|z|) := \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. Então considera-se a álgebra $\mathcal{C}$ gerada pelo conjunto $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ e mostra-se que $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um sistema de geradores livre para $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{FA} \cup \{0\}$. $\square$

É fácil ver que $l_p \setminus l_q$, para $p > q \geq 1$, é não-vazio. Mas também é possível mostrar que

Teorema

Se $p > q \geq 1$ então $l_p \setminus l_q$ é espaçável.

Demonstração. A ideia é basicamente mostrar que o subespaço vetorial l_q de l_p, não é fechado em l_p (e isto usando um argumento com sequências truncadas) e então aplicar o resultado a seguir. $\square$

Proposição

Seja X um espaço de Banach. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere Z_n um espaço de Banach e $T_n : Z_n \to X$ uma função linear contínua. Se

$Y := \operatorname{span}\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(Z_n)\right\}$ não é fechado em X então $X \setminus Y$ é espaçável.

Outro conjunto estudado foi $l_p \setminus \bigcup_{1 \leq q < p} l_q$, com $p > 1$. Vê-se que este subconjunto é não-vazio, primeiramente analisando o caso $p = 2$ (pois o fato de l_2 ser um espaço de Hilbert ajuda aqui) e depois aplicando ao caso geral.
E, usando a proposição anterior, conclui-se que

Teorema

Se $p > 1$ então $l_p \setminus \displaystyle\bigcup_{1 \leq q < p} l_q$ é espaçável.

Demonstração. Se baseia em mostrar que $\bigcup_{1 \leq q < p} l_q$, visto como subespaço vetorial de l_p, não é fechado em l_p. $\square$

Referências

1. Aron, R. M.; Bernal-González, L.; Pellegrino, D. M.; Seoane-Sepúlveda, J. B. *Lineability: The Search for Linearity in Mathematics, Monographs and Research Notes in Mathematics*, FL, CRC Press, 2016.

2. Berezhnoi, E. I. *The Subspace of $C[0,1]$ Consisting of Functions Having Finite One-Sided Derivatives Nowhere*, Mathematical Notes, **73** (2003), 321–327.

3. Bernal-González, L.; Bonilla, A. *Families of strongly annular functions: linear structure*, Rev. Mat. Complut, **26** (2013), 283–297.

4. Fonf, V. P.; Gurariy, V. I.; Kadets, M. I. *An infinite dimensional subspace of $C[0,1]$ consisting of nowhere differentiable functions*, C. R. Acad. Bulgare Sci., **52** (1999), 13–16.

Referências

5. Jarnicki, M.; Pflug, P. *Continuous Nowhere Differentiable Functions. The Monsters of Analysis*, Springer, 2015.
6. Kitson, D.; Timoney, R. M. *Operator ranges and spaceability*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **378** (2011), 680–686.
7. Megginson, R. E. *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer, 1998.
8. Oxtoby, J. C. *Measure and Category*, Springer, 1971.

Obrigado pela atenção!
Que a graça do SENHOR JESUS seja com todos vocês!